特集 数理物理 この10年 物理の立場から

超弦理論からの展望

大栗博司

● 数学のもたらすもの

物理学の目的は宇宙の基本法則を発見し，それを使って自然現象を説明することです．そもそも基本法則というものがあるかどうかは自明ではありません．かりにその存在を認めるとしても，それを人間が発見し理解できるという保証はありません．人間の脳の構造が進化の偶然の産物だとすると，素粒子の標準模型[1)]が人間の身長の 10^{18} 分の1のスケールまでに起きているすべての現象を精密に記述できるようになったということは奇跡のように思えます．

それを可能にしてきたのは数学の力です．自然言語は我々がふだん経験するできごとを表現することには長けていますが，物理学で対象とする非日常的な現象の記述には適していません．物理学の発展は，数学のもつ普遍性・抽象性・厳密性によって初めて可能となったのです．新しい物理現象が既存の数学で理解できるとは限りません．微積分がニュートン力学とともに誕生したことはよく知られていますし，一般相対性理論や量子力学は当時最新の数学であったリーマン幾何学やヒルベルト空間の理論に基づいて構成されました．最近の例では，ゲージ場の理論が数学の新しい発展を促し，それがまたゲージ場の記述する物理現象のさらに深い理解に役立ってきたことが挙げられます．物理学のフロンティアーの開拓は新しい数学を必要としてきたのです．

● 超弦理論のめざすもの

この記事では，最近目覚しい発展を遂げた超弦理論を例にとって，この10年間の数学と物理学の交流について振り返ります．物理学の他の分野の成果に触れられないことをお詫びします．超弦理論の構成自身については太田さんの解説(20ページ)をご覧ください．

超弦理論の目指すものは重力理論と量子力学の統合です．これまで物理学はより微小の世界を理解しようとすることで進歩してきました．この過程で自然には「原子 ⇒ 核子 ⇒ クォーク」という階層構造があることも分かってきました．自然法則が短距離のフロンティアーの探索によって漸次に理解できてきたことは物理学者にとって幸運でした．いわば自然が徐々にその姿を我々の前に現してきてくれたかのようです．

ところが重力理論では距離を定める時空の計量場自身が力学変数なので，距離のスケールをあらかじめ設定してから重力を量子化[2)]することはできません．重力と量子力学を統合する理論はどのような短距離の現象も記述できるものでなくてはならない．このため自然の階層構造は量子重力の理論で打ち止めになると期待されています．重力を含む統一理論の構成はこのような野心的な目標なので，そのような理論の候補が1つでも存在していて，しかもそれが素粒子の標準模型を含みうるものであることは驚きに値します．

● 共形場の理論

超弦理論は現在建設中の理論で，その全貌がどのようなものであるのかはわかっていません．我々はその理論のさまざまな極限を理解しているにすぎないのです．

通常の場の理論はラグランジァンによってその古典論的性質が定義され，その量子化は経路積分によ

って定式化されます．経路積分を厳密に実行することは困難なことが多いのでさまざまな近似法が開発されました．場の理論には相互作用の強さを特徴付ける結合定数と呼ばれるパラメータがあります．経路積分がガウシアン積分[3]からどのくらいずれているのかの目安といってもいいでしょう．この結合定数が微小な場合に，量子振幅をその漸近展開によって計算する方法を摂動展開と呼びます．場の理論では，摂動展開の各項はファインマン・ダイアグラム[4]を使って計算されます．

ところが超弦理論ではこのラグランジャンにあたるものがまだ見つかっていません．特に1995年までは，超弦の量子振幅を計算する唯一の方法は摂動展開でした．場の量子論のファインマン・ダイアグラムに対応するものは2次元のリーマン面です．摂動展開の各項は，このリーマン面の上の共形場の理論の量子振幅を計算し，さらにそれをリーマン面のモジュライ空間[5]の上で積分して得られます．したがって共形場の量子振幅がリーマン面のモジュライ空間上でどのような幾何学的性質を持つのかを理解する必要がありました．

一方で共形場の振幅はビラソロ代数やカッツ-ムーディ代数などの無限次元リー代数の表現論とも深いかかわりがあります．このため共形場の理論の研究を通じてリーマン面のモジュライ空間上の幾何学と無限次元リー代数の表現論との間の関係が明らかになり，この方面の数学の発展を促しました．この

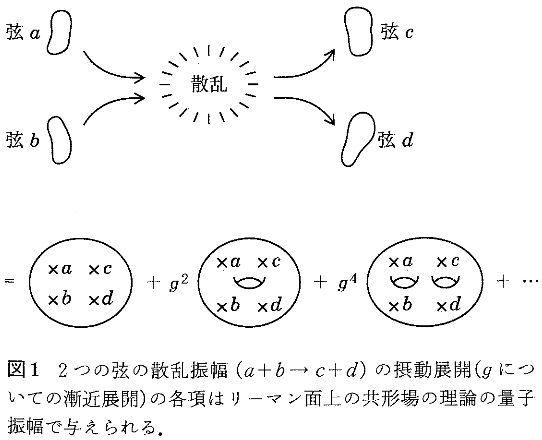

図1　2つの弦の散乱振幅 $(a+b\to c+d)$ の摂動展開(gについての漸近展開)の各項はリーマン面上の共形場の理論の量子振幅で与えられる．

分野は1980年代後半にさかんに研究され，私自身いろいろな数学の方と何度も研究会を開いて勉強をした楽しい思い出があります[1]．

90年代になると超弦の振幅が時空間の幾何構造にどのように依存しているのかを知ることが重要になってきました．そもそも超弦理論は10次元の時空間を対象にしますが，物理学者はそのうちの6次元がコンパクトなカラビ-ヤウ多様体になっていて残りの4次元が我々が日常経験するミンコフスキー空間であると解釈しています．6次元のカラビ-ヤウ多様体を1つ決めると，4次元の世界が1つ定まる．そこで，我々の生きているこの4次元世界がどのようなカラビ-ヤウ多様体によって与えられているのか，カラビ-ヤウ多様体を変えたら4次元の物理量の値(たとえば電子の質量)はどのように変わるのかを知ることが必要になります．

ところで物理学では以前から双対性という概念が重要な役割を果たしてきました．たとえば粒子と波動の双対性は量子力学の基礎の1つです．一般に2つの見かけ上ことなる理論が量子力学系として同型である(すなわちヒルベルト空間やその上の作用素代数が同型である)とき，2つの理論は双対であると呼びます．双対性の例として次に述べるミラー対称性があります．

カラビ-ヤウ多様体 M の上の超弦理論を記述するためには，リーマン面から M への写像を力学変数とする場の理論，すなわちシグマ模型を使います．このとき M をシグマ模型の標的空間とよびます．たとえば，素粒子の質量の起源とされるクォークやレプトンとヒッグス場との湯川結合は，3つの作用素の真空期待値(相関関数)を計算することで求められます．

これらの作用素は，カラビ-ヤウ多様体 M 上のコホモロジー $H^{1,2}(M)$ もしくは $H^{1,1}(M)$ の元に対応しています．この場合，シグマ模型の経路積分が厳密に実行できて，$H^{1,2}$ の3つの元 $\omega_i, \omega_j, \omega_k (i,j,k=1,2,\cdots,h^{1,2})$ の相関函数は，コホモロジー環の係数

$$C_{ijk}(M)=\int_M \Omega \wedge \partial_i \partial_j \partial_k \Omega \qquad (1)$$

と一致することが知られています．ここで，Ω はカラビ-ヤゥ多様体上の(定数係数を除いて一意に存在する)正則3形式であり，$\partial_i, \partial_j, \partial_k$ は M の複素構造のモジュライについての微分でそれぞれ $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ に対応するものです．

これに対し，$H^{1,1}(M)$ の3つの元 $k_a, k_b, k_c (a, b, c=1, 2, \cdots, h^{1,1})$ の相関函数は無限和の形で

$$\tilde{C}_{abc}(M)=\int_M k_a k_b k_c+\sum_n d(n, M)\,\frac{n_a n_b n_c e^{-t\cdot n}}{1-e^{-t\cdot n}} \qquad (2)$$

と書くことができます．ここで $d(n, M)$ はカラビ-ヤゥ多様体 M のなかに正則に埋め込まれている2次元球面で，f を埋め込み写像としたとき $\int k_a = n_a$ となるものの数(ここでいう“数”の正確な定義については，髙橋さんの解説(34ページ)をご覧ください)，また $t\cdot n=\sum_a t^a n_a$ で t_a は複素化されたケーラー・モジュライと呼ばれる M を特徴付けるパラメータです．すなわち超弦理論では，$H^{1,1}$ の相関函数はカラビ-ヤゥ多様体の中の正則な球面の数を数える母函数になっているのです．

カラビ-ヤゥ多様体 M を標的空間とするシグマ模型について，$H^{1,1}$ と $H^{1,2}$ に対応する作用素の入れ替えが場の理論の同型写像を引き起こすことは早くから知られていました．グリーンとプレッサーは，$H^{1,1}(M)$ と $H^{1,2}(M)$ を入れ替えて得られる場の理論が別の多様体 W を標的空間とするシグマ模型と同型になっている例を具体的に構成し，このような M と W との対応をミラー対称性と名づけました．この場合，2つのシグマ模型は双対対応にあるというわけです．

さらにキャンデラスのグループは，M について計算した(2)と W について計算した(1)とが一致するべきであるとして，これから $d(n, M)$ をすべての n について決定しました[2]．この量は，それまで n の小さな値についてだけ計算されていたので，それがすべての n について一挙に求められ，しかもそれが異なる多様体 W の(1)で与えられるということは驚きをもって迎えられました．

また，バーシャドスキー，チェコッティ，バッファと筆者は，ミラー対称性の考察を高い種数のリーマン面に拡げ，カラビ-ヤゥ多様体のなかのリーマン面の数の母函数がミラー多様体上のファインマン・ダイアグラムで求められることを示し，それを逐次に計算する処方を与えました．これは自明でない共形場の理論について，リーマン面のモジュライ空間の上の積分を解析的に実行した最初の例にもなりました．

ミラー対称性は，超弦理論による時空間の幾何の記述が通常の場の理論によるものと大きく異なることを示唆しており，これを量子幾何学と呼ぶこともあります．前に述べた粒子と波動の双対性は数学的にはフーリエ変換によって理解されています．ミラー対称性にもこのような解釈が可能であると期待されています．ミラー対称性はコンセビッチ，ギベンタール，深谷賢治らの仕事によって数学的に定式化され，この方面の研究はさらに発展を続けています．

● 超弦理論の双対性

このように超弦理論の摂動計算が整備されつつある中で，変革の第一波が押し寄せてきました．ザイバーグとウィッテンによる4次元の $N=2$ 超対称性[6] をもつゲージ理論の厳密解の発見です．この結果は，数学の立場からは，これまで困難であったドナルドソン不変量の計算に手がかりを与えたことで知られています．ドナルドソンの理論では，非可換ゲージ場を使って4次元空間の位相不変量を定義します．ザイバーグ-ウィッテンの解は，これがもっと簡単な可換ゲージ場の方程式の解空間の上の計算に帰着できることを明らかにしたのです．ほぼ同時にバッファとウィッテンは4次元の $N=4$ 超対称性を持つゲージ理論の分配函数が結合定数 g についての保形形式になっていることを，中島啓や吉岡康太の数学的結果を使って示し，結合定数 g をもつ理論と $1/g$ をもつ理論が双対であるという以前か

らの予想に重要な証拠を与えました．

第二の波は1995年の南カリフォルニア大学の会議で起きました．ウィッテンがこれらのゲージ理論についての考察を超弦理論に押し広げ，超弦理論の双対性についての一連の予想を提示したのです[3]．この双対性は，たとえば弦の結合定数 g についての漸近展開を $1/g$ についての漸近展開と結びつける変換なので，ウィッテンの予想を摂動展開の枠内で証明することはできません．理論自身が定義されていないのですから，これは証明されるべき予想というよりも将来構成される理論の持つべき性質を述べたものと言えます．もちろんウィッテンが提示したさまざまな予想が，相互に矛盾がないことや，摂動計算から知られている事実と適合していることを確かめる必要があります．この予想の検証の過程で，これまでまったく無関係と思われていた計算の間の関連が明らかになりました．たとえば，前に述べたミラー対称性を使った超弦振幅の計算と $N=2$ ゲージ理論のザイバーグ-ウィッテン解の間に対応があることがわかったのです．

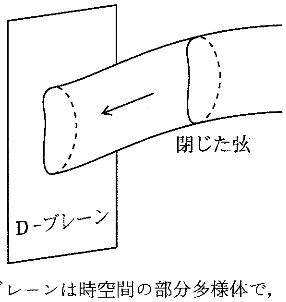

図 2.1 D-ブレーンは時空間の部分多様体で，閉じた弦を吸収・放出できる．

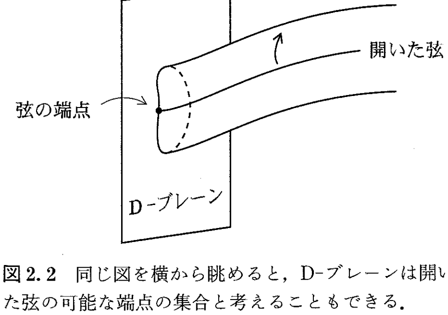

図 2.2 同じ図を横から眺めると，D-ブレーンは開いた弦の可能な端点の集合と考えることもできる．

この超弦理論の双対性予想の検証に大きな役割を果たしたのが，ポルチンスキーのD-ブレーンです．たとえば閉じた弦のみからなるIIA(IIB)型の超弦理論では，D-ブレーンは10次元の時空間の中の奇数(偶数)次元の部分多様体で，弦がそこから吸収されたり放出されたりできるようになっているものです．図2をご覧ください．閉じた弦が吸収・放出されている様子を横から眺めると，弦に端点があってそれがD-ブレーンの占める部分多様体の上に乗っていることがわかります．このようにD-ブレーンは，摂動論的には閉じた弦しか持たなかったIIA・IIB型の理論の中に開いた弦を導入します．

なぜこのようなものを考える必要があるのでしょうか．双対性予想は超弦理論のヒルベルト空間がさまざまな非摂動的状態を含んでいることを予言します．超弦理論の結合定数を g とすると，これらの状態は $1/g$ に比例する質量を持ち，g についての漸近展開では構成することができません．D-ブレーンを使うとこれらの多くを構成することができます．ここで必要になるのは，D-ブレーン上のゲージ理論の束縛状態の分析です．

たとえば，D-ブレーンが時空の4次元部分多様体を占めているときには，その束縛状態のうちで重要なものはゲージ場のインスタントン解[7]の解空間上のコホモロジーによって与えられます．このコホモロジーにアファイン・リー代数が作用するという中島の発見は，超弦理論の双対性の予想と見事に一致する結果を与えました．またD-ブレーンの状態空間の高次コホモロジーの漸近公式は，ベッケンシュタインとホーキングが予想したブラック・ホールのエントロピー公式[8]と密接な関係があることも知られています．

10次元の時空間がコンパクトな6次元のカラビ-ヤウ多様体と4次元のミンコフスキー空間の積になっているとすると，カラビ-ヤウ多様体の部分多様体に巻き付いたD-ブレーンは4次元上の粒子状態を与えます．そこでどのような部分多様体がどのような粒子状態を与えるのか，また前節で述べたミラ

ー対称性がこれらの粒子状態にどのように作用するのかを理解することが必要になります．この問題についても，数学と物理学双方の立場から精力的な研究が進められています．

超弦理論の双対性予想は，このほかにもさまざまな数学的問題を提起しています．しかし物理学者の立場からすると，超弦理論の全貌を知るにはまだ道のりは遠いと言わざるを得ません．この10年間の急激な進歩にも拘らず，我々はまだ場の理論のラグランジァンにあたるものが超弦理論では何であるのかを見つけていないのです．最近発見されたAdS/CFT対応は，特殊な状況のもとで超弦理論のラグランジァンが何であるのかという問いの答えを与えている[4]．しかし，我々は超弦理論の全貌が俯瞰できる枠組みを必要としているのです．弦の場の理論による定式化の試みは部分的な成功を収めていますが，それを使って超弦理論の非摂動効果を研究するのには多くの改善を必要としています．超弦理論を建設するのには我々はまだ適切なことばを得ていない．21世紀の数学がそれをもたらすことを期待しつつ，筆を擱くことにします．

1）**素粒子の標準模型**：$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ のゲージ対称性をもつ場の量子論で，ゲージ場のほかに，3世代のクォーク・レプトン場とゲージ対称性を自発的に破るヒッグス場とからなる．現在の加速器実験で観測されるすべての現象を高い精度で再現できる．ただし重力現象はその枠組みに含まれていない．また最近の宇宙線観測によりニュートリノに質量があることがわかり，模型に改訂を加える必要がでてきた．

2）**重力の量子化**：アインシュタインの重力理論は時空の計量場の時間発展を記述する古典力学系である．これに量子化の手続きを形式的にほどこすと，4次元以上では「くりこみ不可能」な発散などさまざまな困難が現れる．4次元以上で計算可能な量子重力理論は，これまでのところ超弦理論しか知られていない．

3）**ガウシアン積分**：

$$\int\prod_i dx_i \exp\Big(-\sum_{i,j} M^{ij}x_ix_j\Big)\sim(\det M)^{-1/2}$$

場の量子論では M が無限次元空間上の作用素（たとえばラプラス作用素）の場合を考える．このとき経路積分はガウシアンであるといい，x_i に対応する力学変数を自由場と呼ぶ．

4）**ファインマン・ダイアグラム**：たとえば，上記のガウシアン積分を以下のように変形してみよう．

$$\int\prod_i dx_i \exp\Big(-\sum_{i,j} M^{ij}x_ix_j - g\sum_{i,j,k} c^{ijk}x_ix_jx_k\Big)$$

この積分を結合定数 g について漸近展開すると，$O(g^n)$ の項は n 個の頂点それぞれに c^{ijk} をおき，それらを M の逆行列で繋いだものとして計算される（試してみてください）．おのおののグラフをこの積分のファインマン・ダイアグラムと呼ぶ．

5）**リーマン面のモジュライ空間**：リーマン面上の複素構造のパラメータ空間．

6）**超対称性**：ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性．4次元の重力を含まない場の理論では最大 $N=4$ の超対称性が可能である．

7）**インスタントン解**：4次元のゲージ場で曲率2形式 F が自己（反）双対，すなわち $F=*F$ $(F=-*F)$ となっているもの．ここで $*$ はホッジ作用素．

8）**ブラック・ホールのエントロピー公式**：ベッケンシュタインとホーキングは，ブラック・ホールは非常に多くの量子力学的状態の統計力学的な集まりであると予想し，そのエントロピーすなわち log（状態数）を質量の函数として与えた．これを量子重力の第一原理から計算することは理論物理学者の長年の夢であった．

参考文献

［1］ 共形場の理論の基本的文献については，論文選集 *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics*, World Scientific (1988) をご覧ください．

［2］ ミラー対称性の基本的文献については，論文選集 *Mirror Symmetry* I, II, International Press (1992, 1997) をご覧ください．

［3］ 超弦理論の最近の話題の案内としては，コロラド大学での夏の学校の講義録 *TASI* 96, World Scientific (1997) がお勧めです．超弦理論を基礎から学ばれたい方には，Polchinski 著の *String Theory* I, II, Cambridge Univ. Press (1999) が良いでしょう．

［4］ AdS/CFT対応については，Aharony, Gubser, Maldacena, 大栗, Oz 著の総説記事 *Large N Field Theory, String Theory and Gravity*, Physics Reports 323 (2000) p.183 をご覧ください．

（おおぐり ひろし／カリフォルニア工科大学）