

特集 宇宙はどんな《言葉》で書かれているか

宇宙の数学とは何か

大栗博司

おおぐり ひろし (東京大学数物連携宇宙研究機構, カリフォルニア工科大学)

数学は、自然科学とは異なり、われわれが住む世界と独立に存在すると言われる。たとえば、ユークリッドの幾何学は、定義と公理を認めれば地球以外のどの星にもっていても成り立つ。このように、経験に先立って存在する世界のことを、古代ギリシア人は“イデア”と呼んだ⁽¹⁾。しかし、数学の歴史的発展が、外部の世界と独立に起きてきたというわけではない。自然科学の研究が、数学のイデアの中の未開拓の領域の存在を示唆し、そこから新しい数学が開花することも少なくない。たとえば、ギリシア語で幾何学を意味するジオメトリアが、ジオ(地面)とメトリア(測量)に由来していることからわかるように、幾何学は地面の測量という自然科学を通じて発見された。

自然界の基本法則を発見し、それを使って宇宙についての根源的な問いに答えようとする物理学の発展は、とりわけ数学と深いかかわりをもってきた。17世紀の科学革命により、人類は、月や惑星の運動という10億から1兆メートルのスケールの現象を理解できるようになった。さらに最近では、地球から 10^{26} メートルの彼方にある、光で見ることで宇宙の果ての様子までも観測することが可能になった。一方、最先端の素粒子加速器では、 10^{-19} メートルという極微の世界

の実験が行われている。このように日常経験をはるかに超えた現象が、日本語のような自然言語によって記述できる(進化論的)根拠はない。われわれの経験領域が広がるごとに、それを記述する新しい数学が必要となるのは自然なことである。この記事では宇宙の研究のために必要な数学のことを、宇宙の数学(Mathematics of the Universe)と呼ぶことにする。宇宙の数学の過去を振り返り、将来を展望しよう。

17世紀の宇宙の数学: 微積分

ガリレオ・ガリレイが望遠鏡をはじめて夜空に向け、宇宙の扉を開いてから、今年で400年になる。木星の衛星の発見により地動説の正しさを確信したガリレオは、その科学観を表明した著書『偽金鑑識官』に、「(宇宙という)偉大な書物を読むためには、そこに書いてある言葉を学び、文字を習得しておかなければならない。この書物は数学の言葉で書かれている」と記している。自然科学の言語としての数学の重要性を認識していたガリレオであったが、その数学は初等幾何や比例の概念にもとづくものであり、古代ギリシアの域を超えることはなかった⁽²⁾⁽³⁾。実際、この文章は、

「その文字は三角形や円などの幾何学的図形である」と続く。

ガリレオは、実験と観測にもとづく近代科学の方法を確立し、またそれによって物体の運動の本質を見抜いていたものの、力学の体系を構築するにはいたらなかった。そのためには、比例の概念よりも高度な数学である無限小の概念の精密化、微分と積分の発見、そして解析学の創設が必要であったからである。これを成し遂げたのは、ガリレオが他界した翌年に生まれたアイザック・ニュートンである*1。ニュートンの力学は、リンゴが木から落下するという1メートル程度の現象から、月が地球の周りを回るという10億メートル程度の現象までを、ひとつの体系で記述できるという画期的な理論であった。解析学の創設とそれによる運動の法則の定式化によって、それ以前には別々の法則に支配されていると考えられていた地上と天界という2つの世界が統一された。17世紀の宇宙の数学は、この統一理論を可能にした微積分であったと言える。

20世紀の宇宙の数学: 一般相対論

ニュートン以後、18世紀のジョセフ・ラグランジュやピエール・シモン・ラプラスなどによる数学的整備によって、ニュートン力学は太陽系内の惑星の運動を精密に記述できることが明らかになった*2。しかし、太陽系を超えたより広い宇宙を理解するためには、アルベルト・アインシュタインの一般相対論が必要になる。たとえば、太陽系から銀河中心までの距離はおおよそ 10^{20} メートルであるが、そこには太陽の200万倍の質量をもつ巨大ブラックホールがあると考えられている。このように大規模な天体現象は一般相対論を使うことで初めて理解できる。また、1929年にエドウィン・ハッブルによって発見された宇宙

の膨張の説明にも、一般相対論が必要であった。

一般相対論の数学が整備されたのは1960年代以降のことである。ブラックホールを記述するシュバルツシルト時空の大域構造が解明されたのが1960年であり、その後10年の間にロジャー・ペンローズとスティーブン・ホーキングは最先端の幾何学的手法を駆使してアインシュタイン方程式の一般解について特異点定理などの重要な結果を得た。その成果を集大成したのが、1973年に出版されたホーキングとジョージ・エリスの名著『The Large Scale Structure of Space-Time(時空間の大域構造)』である。ペンローズは、雑誌『ネイチャー』に掲載したこの本の書評⁽⁴⁾を、“Mathematics of the Universe”と題している。さらに、1978年の江口徹とアンドリュー・ハンソンによるアインシュタイン方程式のインスタント解の発見は、素粒子論や超弦理論に大きな影響を与えた。一般相対論はまさに20世紀の宇宙の数学であった。

21世紀の宇宙の数学とは何か

では、宇宙を理解するうえでの今日の問題を解くためにわれわれが開発すべき21世紀の宇宙の数学とは何であろうか。筆者は、これは量子論であると考え。このように書くと、意外に思う読者もいるかもしれない。ニールス・ボーアに率いられたコペンハーゲン学派が量子力学を創設したのは、今から80年以上も前のことである。少数の粒子からなる量子力学系については、1930年代にジョン・フォン・ノイマンらが数学的基礎を築き、この定式化が原子のなかの複数の電子の運動の記述に使えることは、1951年に加藤敏夫によって数学的に証明された⁽⁵⁾。なぜいまさら量子論なのか。

それには2つの理由がある。ひとつは、素粒子物理学の基本言語である場の量子論が数学的に定式化されておらず、そのためには新しい数学が必要と考えられていること。もうひとつは、場の量子論、さらには量子論と一般相対論を統合する理

*1 ニュートンと同時期にゴットフリート・ライプニッツも微積分の概念に到達していたと言われる。

*2 19世紀に、ユルバン・ルベリエは水星軌道の近日点の移動がニュートン力学では説明できないことを指摘した。この問題の解決には一般相対論が必要であった。

論が、初期宇宙のなぞを解くために重要になってきたことである。

なぜいまさら量子論(その1): 千年紀の問題

場の量子論とは、電磁場などの“場”の自由度に量子力学の原理を当てはめようとするものである。場は空間の各点ごとに独立の値を取りうるので、自由度が無限個あることになる。1929年にベルナー・ハイゼンベルグとボルフガング・パウリが電磁気学と量子力学の統一を試みたのが場の量子論の始まりで、湯川秀樹の中間子論は場の量子論が核力の記述にも使えることを示した。しかし、場のもつ無限個の自由度を量子化しようとすると、さまざまな計算に発散があらわれ、それを扱うためのくりこみ理論が完成するのに20年を要した。しかし、これで無限自由度の問題が解決したわけではなかった。1955年にレフ・ランダウは、くりこみの処方で除くことのできない特異点の存在を理論的に指摘し、くりこみによる量子電磁気学の定式化が不完全であることを示した。さらに、矢継ぎ早に素粒子が発見された1950～60年代には、それに対応できない場の量子論の有用性に強い疑念が唱えられた。1970年代初頭のゲージ理論のくりこみ可能性の証明と漸近的自由度^{*3}の発見によって、場の量子論はようやく素粒子物理学の基本言語となった。しかし、80歳となった今日でも、場の量子論は数学者からは理論として認知されていない⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

2000年にクレイ数学研究所は千年紀を記念して、7つの“ミレニアム問題”を提起した。その中の1問に、「ヤン-ミルズ場の量子論を数学的に定式化せよ」というものがある⁽⁸⁾。このいわゆるヤン-ミルズ問題が、リーマン予想やポアンカレ予想と並んでミレニアム問題のひとつに選ばれた理由は、場の量子論に数学者にも納得できる定義を与えることで、この理論を数学の1分野として確立し、数学の発展に新しい方向が開かれるこ

とを期待するからだという。

場の量子論の正しい定式化を追究することは、数学者を満足させるためだけではない。物理学者が場の量子論の計算をするときに、最初に試みる近似法は、相互作用の強さを表す結合定数についてのべき展開、すなわち摂動展開である。過去60年以上にわたって、この近似計算にはファインマン図を使う方法が標準的であった。しかし、ここ数年の間にこれに代わるまったく新しい方法が開発されつつあり、ファインマン図の方法では技術的に困難とされてきた高次の近似計算ができるようになってきた⁽⁹⁾。摂動展開のような、もはや調べ尽くされたと思われる部分にも新しい驚きがあり、美しい数学的構造が隠されている。われわれは、場の量子論とは何なのかをまだ理解していないのである。

一方、量子論に着想を得た数学は、この20年ほどの間に大きな進歩を遂げている⁽¹⁰⁾。これは、1990年以來のフィールズ賞受賞数学者の4割近くが、量子論に関連する数学の研究に深くかかわっていることからわかる。たとえば、場の量子論の計算の中でもとくに性質のよいものを数学的に定式化した“量子不変量”の理論が、幾何学の理解に大きなインパクトを与えている^{*4}。場の量子論の深淵に現代数学の光が差し込もうとしているのである。

なぜいまさら量子論(その2): 初期宇宙論

このような数学の発展と時を同じくして、初期宇宙の理解に場の量子論が重要になってきている。ビッグバンの残り火が宇宙の膨張によってマイクロ波にまで引き伸ばされた宇宙背景放射は、1948年にジョージ・ガモフらによって理論的に予想され、1965年にアルノ・ペンジラスとロバート・ウィルソンによって観測された。2006年度のノーベル物理学賞を受賞したジョン・マザーとジョージ・スムートは、人工衛星に搭載された宇宙背

^{*3} この性質をもつ場の量子論にはランダウの特異点は存在しない。

^{*4} たとえば、ミラー対称性の理論やゲージ場のモジュライ空間の不変量の理論がこの例である。

景放射探索機(COBE)を使って、マイクロ波の温度分布を全天にわたって観測し、そこに10万分の1程度の小さなゆらぎがあることを発見した。

佐藤勝彦とアラン・グースが独立に提唱したインフレーション宇宙論では、宇宙が指数関数的に膨張した時期があったとする。この時期には、さまざまな物質場やさらには時間や空間までが、量子力学の不確定性原理によってゆらいでおり、これが宇宙の指数関数的膨張によって固定される。杉山直らは、このゆらぎが宇宙全体と共鳴することで、マイクロ波の温度の高低のパターンを生じることを理論的に示した。2000年以來大きく進歩したマイクロ波の温度分布の観測により、宇宙が空間方向に平坦であることが確認され、また暗黒物質や暗黒エネルギーの密度が精密に決定された。

天文学者のカール・セーガンは、われわれを構成している元素の多くが過去の超新星爆発で合成されていたことから、「私たちは星屑でできている」と述べた。しかし、宇宙の歴史をインフレーション時代までさかのぼると、われわれの存在は宇宙初期の量子的ゆらぎに由来するのである。実際、東京大学数物連携宇宙研究機構(IPMU)の吉田直記は、このゆらぎを種として星や銀河などの構造ができる仕組みを明らかにしている。ゆらぎの起源と性質を基本原理から解明することは、宇宙のなぞを解く鍵のひとつである。

一般相対論と量子力学を統合する究極の統一理論の姿は、 10^{28} 電子ボルトという超高エネルギー(いわゆるプランク・エネルギー)で明らかになると考えられている。そこでは、重力相互作用も電磁気力や核力などの力と統一される。現在最も強力な欧州原子核研究機構(CERN)の大型ハドロン衝突型加速器(LHC)の最大出力は 10^{13} 電子ボルト程度なので、プランク・エネルギーには手が届かない*5。しかし、宇宙に目を向けると、インフレーション時代に宇宙が指数関数的に膨張していたために、初期宇宙のゆらぎの起源を含むプラン

ク・エネルギーの現象が、宇宙規模で観測できる可能性がある。

今年5月14日に、太陽と地球の重力のつりあう第2ラグランジュ点に向けて打ち上げられた欧州宇宙機関のプランク探査機を始め、米国航空宇宙局の将来計画 Beyond Einstein Program のレーザー干渉型宇宙アンテナ(LISA)やインフレーション探査機によって、今後10~20年のうちにインフレーション宇宙の理解が飛躍的に進むと期待される。さらに、LISAの後継機として検討されているビッグバン観測機は、重力波によってインフレーション時代の宇宙の様子を直接観測することを目指す。日本の宇宙レーザー干渉計画にも期待がかかる。初期宇宙の観測によって、プランク・エネルギーの物理の窓が開かれることも夢ではない。

超弦理論

初期宇宙の理解には、一般相対論と量子論の統合が必要である。これを達成する見込みのある理論は、現在のところ超弦理論しかない。超弦理論は、“素粒子の標準模型”*6を構成するために必要なすべての材料を含んでおり、さらに重力相互作用をも記述するので、一般相対論と量子力学を統合し、すべての素粒子とその相互作用を記述する究極の理論の最有力候補とされている。超ひも理論、また英語をカタカナ書きしてスーパースtring理論と呼ばれることもあるが、同じものである。通常の素粒子模型が点粒子を基本的な自由度とするのに対し、超弦理論はバイオリンの弦のように振動する弦を最小単位とする。そして、弦のさまざまな振動状態から、素粒子やその間の相互作用を媒介するゲージ場、さらには重力場などが現れると考えられている。超弦理論は21世紀の宇宙の数学になるのであろうか。

*5 余剰次元のある模型の特別な場合には、LHCでも、プランク・エネルギーに達すると考えられている。

*6 クォークやレプトンと呼ばれる素粒子、その間の相互作用を媒介する電磁場などのゲージ場、そしてそれらの質量の起源となるヒッグス場を支配する法則をまとめたもの。2008年のノーベル物理学賞の対象となった小林-益川理論は、標準模型の重要な部分である。

超弦理論と数学

複素数の概念は、3次方程式の根の公式を導くために16世紀に導入されたが、虚数という言葉が示すように、その後2世紀にわたって不自然なものと思われてきた。しかし、18世紀における複素平面の発見とその後の発展により、数学の多くの問題において、複素数こそが自然な数であり、実数はその影に過ぎないと考えられるようになった。たとえば、2次方程式の実根の有無は判別式に依存するのに対し、複素根は常に存在する。このように、数の概念を拡げることで、数学のより深くより普遍的な構造が明らかになるのである*7。

超弦理論によって、複素数の発見と同様の変革が幾何学に起きるかもしれない。ユークリッドの原論の第1巻が「点は部分をもたないものである」という主張から始まるように、2300年以上にわたって幾何学の基礎は大きさや構造をもたない“数学的点”であった。超弦理論は1次元に拡がった弦を基本単位にするので、幾何学に新しい見方をもたらしている。

弦によって幾何学的対象を見ると、“形”と“大きさ”という一見して異なる概念も、ミラー対称性によって入れ替わってしまう。また、“数学的点”は構造をもたないのに、弦は無数の形状をとることができるので、これを使ってさまざまな代数の表現が構成できる。このために、幾何学と代数学が思いがけない形で結びつくことになった。さらに、超弦理論に触発されて、有限群論(モンスター群の表現)から確率・統計にいたる数学の幅広い分野で画期的な発見がなされている。

一般相対論と量子力学を統合する超弦理論では、時間や空間さえ量子論的にゆらぐので、時空間を“うつわ”として、その中で物質が時間発展をするという描像は必ずしも適切ではない。むしろ、物質と時空間の区別すら相対化され、両者がより根源的な構造から立ち現れるような枠組みが必要

になると考えられる。量子力学の不確定性原理の発見がわれわれの世界観に深遠な影響を与えたように、超弦理論は、われわれの時空概念に大きな変更をもたらすことになるかもしれない。

究極理論としての超弦理論

1974年にホーキングは、アインシュタイン方程式の解としては暗黒であるはずのブラックホールが、量子力学の効果で発熱を起し蒸発することを示した。さらにホーキングは、この現象が科学の基礎である因果的決定論と矛盾すると主張し、この点を巡ってその後20年以上にわたって論争が繰り返された。超弦理論はブラックホールの発熱現象が因果的決定論と矛盾しないことを示し、この問題を解決した⁽¹¹⁾。これは、超弦理論が重力場の量子化に成功している有力な証拠となった。さらに、筆者の最近の研究により、ブラックホールの量子状態が数学の量子不変量の理論と深い関係にあることが明らかになった。これらの話題については、解説記事⁽¹²⁾⁽¹³⁾を参照されたい。

超弦理論の数学はまだまだ発展途上であり、素粒子の標準模型を基本原理から演繹するには至っていない。超弦理論は9次元の空間と1次元の時間を使って定義されており、われわれが日常経験する縦・横・高さの3次元の空間を再現するためには、6次元が隠されている必要がある。しかしこの6次元は余計なものではなく、標準模型の構造は6次元の幾何学によって決まると考えられている*8。このような高次元空間の理解には最先端の幾何学を必要とする。IPMUでは、気鋭の数学者と物理学者によって、高次元の幾何学から標準模型やそれを超える理論を導出するための研究が進められている。

プラトンの洞窟

超弦理論の第1の目標は、究極の理論を完成さ

*7 本特集のアレクセイ・ボンダルの記事で解説されているように、有限体や p -進体といった方面への数概念の拡張も重要である。

*8 本特集のリサ・ランドール、村山斉と筆者の鼎談を参照。

せ、それから観測可能な予言を導くことである。しかし、この10年ほどの間に、これ以外の広範な問題にも超弦理論の技術が応用されるようになってきた。

これが可能になったのは、ホログラフィー原理のおかげである。光学におけるホログラフィーとは、立体像を干渉縞で記録する方法のことを指す。超弦理論では、この用語を借用して、重力理論と場の量子論が対応するという考え方をホログラフィー原理と呼んでいる。これによると、重力を含まない場の量子論は、プラトンの洞窟の比喩⁽¹⁾のように、超弦理論の現象が時空間の果てに映し出された影のようなものであるという。ファン・マルダセナが1997年に提案したAdS/CFT対応はその最も明解な例である。ホログラフィー原理を使うと：

- (A) 量子重力のなぞを、重力を含まない通常の場の量子論の問題に翻訳することで、解決することができる。
- (B) 逆に、場の量子論の技術的に難しい問題を、重力理論の問題に翻訳し、幾何学的方法で解くことができる。

陽子、中性子、中間子などのいわゆるハドロン粒子は、複数のクォークが“強い相互作用”とよばれる力によって結び付けられてできた、複合粒子であると考えられている。しかし、その性質を基本原理から演繹することは技術的に難しく、今のところコンピュータ・シミュレーションがほぼ唯一の手段である。マルダセナがAdS/CFT対応を提案した数カ月後に、エドワード・ウィッテンは、これを使ってクォークがハドロンの中に閉じ込められているわけを定性的に説明した^{*9}。筆者らは、この考えをヤン-ミルズ理論のマスクヤッ

プの計算^{*10}に応用し、定量的にも期待以上の結果を得た。これらの研究は、AdS/CFT対応を使って素粒子の強い相互作用を理解する技術、いわゆるAdS/QCDのさきがけとなった。

AdS/QCDの技術はこの10年の間に大きく進歩した。初期のAdS/QCDではクォークの自由度の扱い方に問題があったが、IPMUの杉本茂樹は酒井忠勝との共同研究によってこの点を改善し、ハドロンのおもろい性質を解析的に導くことに成功した。また、ワシントン大学のグループは、ブルックヘブン国立研究所の相対論的重イオン衝突型加速器で観測されたクォーク・グルーオンプラズマの熱力学的性質を、AdS/QCDを使って説明している。

ホログラフィー原理は、素粒子物理学にとどまらず、物性物理学の強相関現象である量子相転移や量子流体などの幅広い分野に応用されている。IPMUの高柳匡と李^{リウエイ}徽は、物性物理学者の笠真生との共同研究で、量子ホール効果をホログラフィー原理で理解する方法を開発している。

この10年間の発展から考えると、超弦理論と場の量子論は独立に存在する理論ではなく、この2つを止揚したより大きな枠組みの中に位置づけられることになるかもしれない。筆者は、クレイ数学研究所のヤン-ミルズ問題も、超弦理論からのアプローチによって解決されるのではないかと期待している。

* *

17世紀から今日に至る近代科学の発達は世界史の奇跡である。歴史をさかのぼると、インド、アラビア、中国など、科学技術において同時代のヨーロッパを凌駕していた地域はあったものの、これらの地域ではついに科学革命は起こらなかった。近代ヨーロッパの爆発的な発展についてはさまざまな原因が指摘されているが⁽¹⁴⁾、筆者は数学的に整合な世界像への希求がひとつの要因であったと考えている。数学を使って世界を統一的に理解するという考え方は、古代ギリシアに生まれ⁽¹⁵⁾、近代ヨーロッパに引き継がれ、この解説の冒頭に引用したガリレオの言葉に表現されてい

^{*9} クォークの閉じ込めについては、これ以前に、南部陽一郎、ヘラルト・トホーフ、スタンレー・マンデルスタムが、おのおの独立の論文で超伝導体のマイスナー効果との類似による説明を提案していた。その後、ネーサン・ザイバークとエドワード・ウィッテンは、超対称性をもついくつかのモデルでは、この南部らのアイデアが理論的に実現されていることを証明した。

^{*10} 基底状態と励起状態間のエネルギー幅のこと。マスクヤップの存在の数学的証明は、クレイ数学研究所のヤン-ミルズ問題の一部となっている。

る。

天文学, 天体物理学, 高エネルギー物理学の飛躍的發展によって, 10^{-19} メートル(LHCの陽子衝突実験で探索できる距離)から 10^{26} メートル(光で見ることのできる宇宙の果てまでの距離)までの, 45桁にまたがる世界の膨大な観測データが人類に提供されている。これらのすべてを, 総合的に記述できる数学体系はまだ存在していない。21世紀の宇宙の理解に必要な数学の開発に, IPMUが貢献できるように努力したいと思う。

謝辞 この記事の原稿に有益なコメントを頂いた高田昌広, 高橋史宜, 立川裕二, 斎藤恭司, 向山信二, 渡利泰山の各氏に感謝します。

文献

- (1) プラトン:『国家』藤沢令夫訳(岩波文庫, 1979年)
- (2) スティルマン・ドレイク:『ガリレオの生涯』田中一郎訳(共立出版, 1985年)
- (3) 高橋憲一:『ガリレオの迷宮』(共立出版, 2006年)
- (4) R. Penrose: “Mathematics of the Universe”, *Nature*, **249**, 597(1974)
- (5) H. Cordes et al.: “Tosio Kato (1917-1999)”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **47**, 650(2000)
- (6) E. Witten: “Some Questions for Constructive Quan-

tum Field Theorists”, *Lect. Notes Phys.*, **446**, Springer (1995)

- (7) 大栗博司:「くりこみ可能性の判定条件」,『この定理が美しい』(数学書房, 2009年)に収録
- (8) ヤン-ミルズ問題の正確な定式化については, クレイ数学研究所のウェブサイト: http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/yangmills.pdfを参照.
- (9) たとえば, C. F. Berger et al.: “Precise Predictions for W+3 Jet Production at Hadron Colliders”, [arXiv: 0902.2760]
- (10) 大栗博司:「幾何学から物理学へ, 物理学から幾何学へ」, 雑誌『数理科学』4月号, 特集:「現代数学はいかに使われているか」(2009年)
- (11) ブラックホールの蒸発についてホーキングと賭けをしたジョン・プレスキルのホームページには, ホーキングの敗北宣言に関する興味深いエッセイがある: http://www.theory.caltech.edu/~preskill/jp_24jul04.html
- (12) 大栗博司:「トポロジカルな弦理論とその応用」, 日本物理学会誌, 第60巻, 85(2005) <http://ci.nii.ac.jp/lognavi?name=nels&lang=ja&type=pdf&id=ART0002817818>で無料で読むことができる.
- (13) 大栗博司:「量子ブラックホールと創発する時空間」, 雑誌『パリティ』6月号(2009年)
- (14) たとえば, ジャレド・ダイヤモンド:『銃・病原菌・鉄』倉骨彰訳(草思社, 2000年)を参照.
- (15) エルヴィン・シュレーディンガー:『自然とギリシヤ人』河辺六男訳(工作舎, 1991年)

